Números Complejos

Prof. Johnny Rengifo

22 de octubre de 2010

Capítulo 1

Números Complejos

Existen muchas ecuaciones cuadráticas que no tienen solución en los números reales $(\mathbb{R})$. Por ejemplo

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

pero se sabe que los números negativos no tienen raíz cuadrada real, dado que no existe ningún número real que elevado al cuadrado resulte un número negativo.

En este documento se tratará el conjunto de números complejos dentro de los cuales estás ecuaciones tienen solución. Adicionalmente los este conjunto de números resulta de gran utilidad dentro del estudionde sistemas de potencia, dado que simplifican el problema.

1.1. Unidad imaginaria

Para el trabajo con números complejos se define la unidad imaginaria como[1]:

$$j = \sqrt{-1}$$

O dicho de otra forma, la unidad imaginaria es aquella que elevada al cuadrado resulta -1.

$$j^2 = -1$$

Todas las raíces de números negativos pueden expresarse en función de la unidad imaginaria. Por ejemplo

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2j$$

[1]En la literatura de función de variable compleja y números complejos la unidad imaginaria se define como i, pero en áreas como ingeniería eléctrica o electrónica i se refiere a intensidad de corriente, es por ello que en su lugar se utiliza j como símbolo de la unidad imaginaria. Símbolo que se tomará en este trabajo.

1.2. Definición

A toda expresión de la forma $v + jw$ donde v e w pertenecen a los números reales y j es la unidad imaginaria la llamaremos número complejo. Para referirse a cualquier número complejo utilizaremos la letra z, de esta forma:

$$s = v + jw \tag{1.1}$$

$$v, w \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

$$v = \mathrm{Re}\,\{s\} = \text{parte real}$$

$$w = \mathrm{Im}\,\{s\} = \text{parte imaginaria}$$

Cuando $v = 0$ se dice que s es un número imaginario puro, mientras cuando $w = 0$, s se convierte en un número real, lo que indica que los número reales son números complejos cuya parte imaginaria es igual a cero.

A partir de este análisis se establece un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números complejos al que se le designa la letra $\mathbb{C}$. El conjunto los números reales está contenido dentro del conjunto de los números complejos ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

1.3. Igualdad de números complejos

Se dice que dos números complejos s_1 y s_2 son iguales si y solo si son iguales entre si sus partes reales e imaginarias.

$$s_1 = s_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\{\mathrm{s}_1\} = \mathrm{Re}\{\mathrm{s}_2\};\, \mathrm{Im}\{\mathrm{s}_1\} = \mathrm{Im}\{\mathrm{s}_2\}$$

Los números complejos expresados en las forma $s = v + jw$ se dice que están expresados en forma binómica[2].

1.4. Representación gráfica

Un número complejo $s \,\epsilon\, \mathbb{C}$, puede ser representado en un sistema de coordenadas de dos dimensiones llamado plano complejo, como se muestra en la figura 1.1.

La parte real de s se representa en el eje de las abscisas (eje horizontal) el cual recibe el nombre de eje real, mientras la parte imaginaria en el de las ordenadas (vertical) denominándose eje imaginario. Es clara la analogía con vectores en dos dimensiones. Un número complejo $s = v + jw$ puede ser interpretado como un vector de dos dimensiones.

[2] La forma binómica de los números complejos también se conoce como rectangular o cartesiana

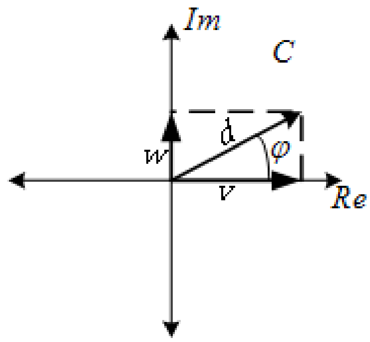


Figura 1.1: Representación de s en el plano complejo

1.4.1. Representación en coordenadas polares

En este punto es conveniente introducir otra representación para los números complejos, conocida como coordenadas polares. A partir de la figura 1.1 se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} v &= d\cos\varphi \\ w &= d\,sen\varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aplicando 1.2 a 1.1 obtenemos la representación en coordenadas polares:

$$s = d\left(\cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\varphi\right) \tag{1.3}$$

Donde d es descrito por

$$d = \sqrt{v^2 + w^2} = |s| \tag{1.4}$$

A partir de la ecuación 1.4 se nota que d representa el valor absoluto de s, denotado por $|s|$, representando el tamaño del vector asociado a s. El ángulo φ se llama argumento de s, y se denota como $\arg(s)$. El argumento de un número complejo corresponde al ángulo φ que se forma entre el vector de s y el semi eje real positivo (ver figura 1.1). Para el caso del primer cuadrante el argumento de s se obtiene a través de relaciones trigonométricas:

$$\tan\varphi = \frac{v}{w} \tag{1.5}$$

Una relación muy importante al trabajar con números complejos, es la ecuación de Euller:

$$\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi = e^{j\varphi} \tag{1.6}$$

La ecuación 1.6 permite llegar a la siguiente representación en coordenadas polares de los números complejos

$$s = d\,e^{j\varphi} = d\angle\varphi \tag{1.7}$$

Nota: Para el análisis de sistemas eléctricos en régimen permanente sinusoidal se utilizan números complejos. Cuando se representan en su forma polar el argumento normalmente se coloca en grados, pero al expresar las señales en su forma temporal se utilizan radianes.

1.5. Conjugado de un número complejo

El conjugado de z se define como:

$$s = v + jw = |s|\, e^{j\varphi} \tag{1.8}$$

$$s^* = v - jw = |s|\, e^{-j\varphi} \tag{1.9}$$

La interpretación gráfica del conjugado de un número complejo se muestra en la figura 1.2.

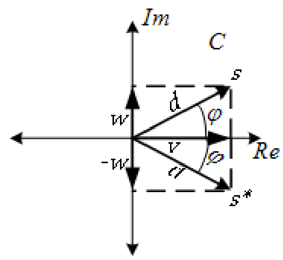


Figura 1.2: Conjugado de un número complejo

1.6. Operación con números complejos

1.6.1. Suma

Para sumar algebraicamente dos números complejos, se suman entre sí por separado la parte real y la parte imaginaria.

$$s_1 = v + jw;\ s_2 = a + jb$$

$$s_1 + s_2 = (v + a) + j\,(w + b) \tag{1.10}$$

A partir de la representación gráfica de los números complejos se puede realizar la suma, para ello se aplica el método del paralelogramo como se observa en la figura 1.3.

1.6.2. Multiplicación

La multiplicación de números complejos puede hacerse en su forma binómica a través de la propiedad distributiva de la siguiente manera:

$$s_1 = v + jw;\ s_2 = a + jb$$

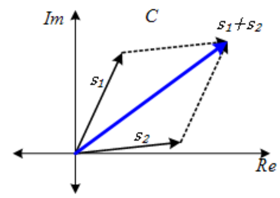


Figura 1.3: Suma de números complejos de forma gráfica

$$s_1 s_2 = (v + jw)(a + jb) = va + jvb + jwa - wb$$

$$s_1 s_2 = (va - wb) + j(vb + wa)$$

Si expresamos los números complejos en su forma polar, podemos aprovechar las propiedades de la función exponencial para simplificar el cálculo:

$$s_1 = d_1 e^{j\varphi} = d_1\angle\varphi;\ s_2 = d_2 e^{j\theta} = d_2\angle\theta$$

$$s_1 s_2 = (d_1\angle\varphi)(d_2\angle\theta) = d_1 d_2\angle(\varphi + \theta)$$

1.6.3. División

Para dividir números complejos en su forma binómica se debe multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$s_1 = v + jw;\ s_2 = a + jb$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v + jw}{a + jb} = \frac{v + jw}{a + jb}\frac{a - jb}{a - jb} = \frac{va + wb + j(wa - vb)}{a^2 + b^2}$$

Al igual que para la multiplicación, la división de números complejos en su forma polar simplifica los cálculos:

$$s_1 = d_1\angle\varphi;\ s_2 = d_2\angle\theta$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1\angle\varphi}{d_2\angle\theta} = \frac{d_1}{d_2}\angle(\varphi - \theta)$$

1.7. Ejemplos complementarios

1.7.1. Cambio de representación binómica (rectangular) a representación polar

Lleve cada uno de los siguientes números complejos en representación binomial a su representación polar

1. $z = 1 + j2$

Primero hallamos el módulo de z

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Ahora buscamos el argumento de z

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63,4349°$$

Finalmente z en su forma polar queda

$$z = \sqrt{5}\angle 63,4349° = \sqrt{5}e^{j1,1071}$$

2. $z = 2 - j3$
Hallamos el módulo de z

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

Si calculamos el argumento, tenemos que

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) = -56,3099°$$

El "menos" en el argumento de z indica que el ángulo se esta tomando en cuenta en el sentido de las agujas del reloj como se muestra en al figura 1.4

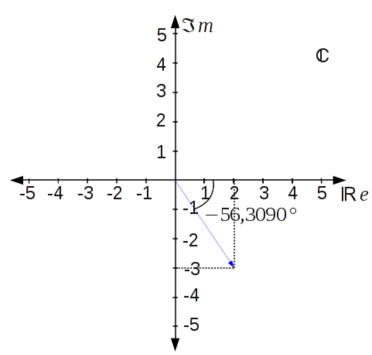


Figura 1.4: Representación en el plano complejo de z

Finalmente z en su forma polar queda

$$z = \sqrt{13}\angle -56,3099°$$

3. $z = -4 - j$

Hallamos el módulo y el argumento de z

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-4}\right) = 14,0362°$$

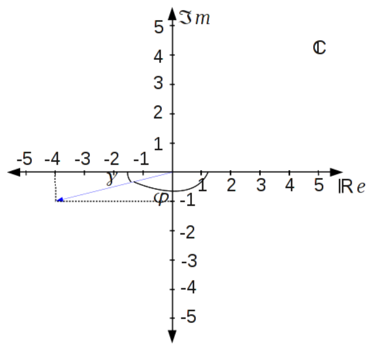


Figura 1.5: Representación gráfica de $z = -4 - j$

El resultado del argumento no es correcto, como se observa en la figura 1.5, el ángulo que obtuvimos corresponde a γ, pero el argumento de z por definición corresponde a φ. Para hallar el argumento de z tenemos que

$$\arg(z) = \varphi = -180 + \gamma = -165,9638°$$

Finalmente z en su forma polar resulta

$$z = \sqrt{17}\angle - 165,9638°$$

1.7.2. Cambio de representación polar a representación binómica (rectangular)

Exprese e su forma binómica cada uno se los siguientes números complejos.

1. $2\angle 45°$
   Utilizamos la ecuación de Euller 1.6

$$2\angle 45° = 2\left(\cos 45° + j\,\mathrm{sen}45°\right) = \sqrt{2}\,(1 + j)$$

2. $7e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

Nuevamente utilizamos la ecuación de Euller

$$7e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 7\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + j\operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) = 7\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -3,5 - j6,0622$$

1.7.3. Operaciones con números complejos

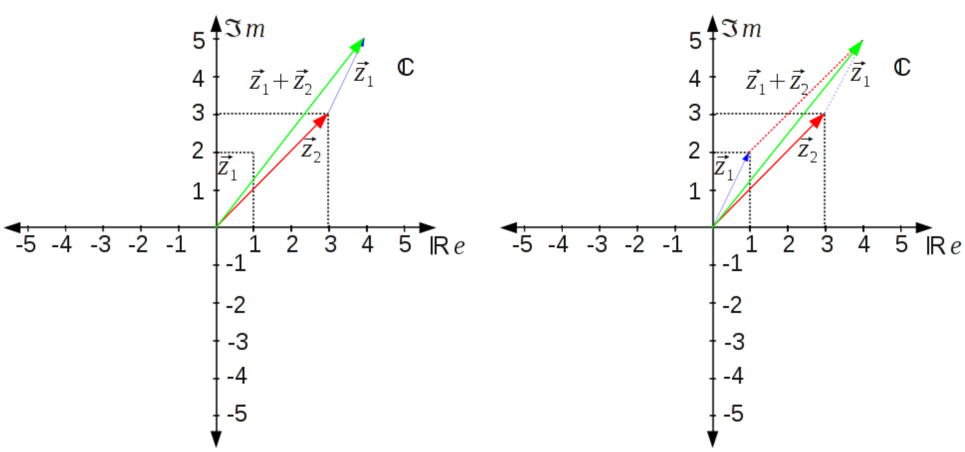
1. Realice la suma de los números complejos de forma analítica y de forma gráfica, para los siguientes números complejos

$$z_1 = 1 + j2$$
$$z_2 = 3 + j4$$
$$z_3 = 2 - j3$$

a) $z_1 + z_2$

$$z_1 + z_2 = 1 + j2 + 3 + j4 = 4 + j6$$

De forma gráfica



(a) Desplazando vectores (b) Método del paralelogramo

Figura 1.6: Suma de números complejos

b) $-2z_1 + z_2$

$$-2z_1 + z_2 = -2 - j4 + 3 + j4 = 1$$

c) $z_1 + z_2 + z_3$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1 + j2 + 3 + j4 + 2 - j3 = 1 + 3 + 2 + j\left(2 + 4 - 3\right) = 6 + j3$$

De forma gráfica

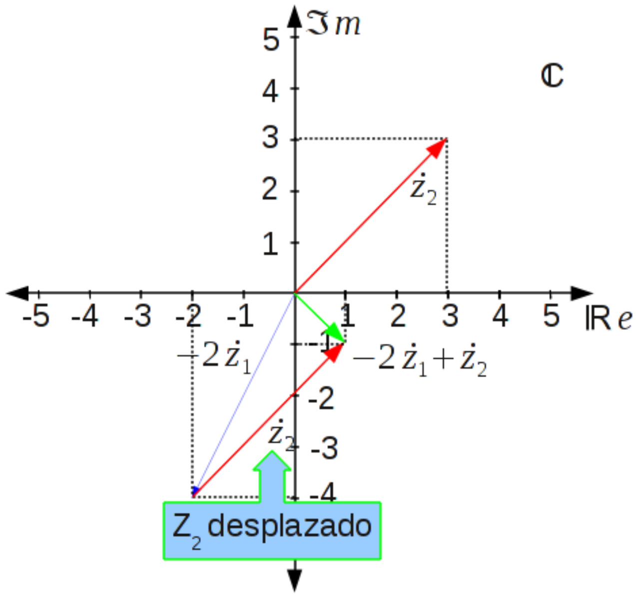


Figura 1.7: Suma gráfica de $-2z_1 + z_2$

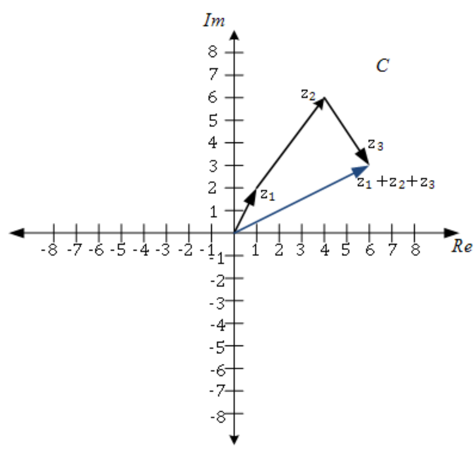


Figura 1.8: $z_1 + z_2 + z_3$

2. Realice el producto indicado, tomando los números en su representación binómica y polar. Verifique que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

$$z_1 = 5\angle 30° = 4{,}3301 + j2{,}5$$
$$z_2 = 3 + j4 = 5\angle 53{,}1301°$$

   a) $z_1 z_2$
   En forma binómica

$$z_1 z_2 = (4{,}3301 + j2{,}5)(3 + j4) = (4{,}3301)(3) + j(4{,}3301)(4) + j(2{,}5)(3) - (2{,}5)(4)$$
$$z_1 z_2 = 2{,}9903 + j24{,}8204 \Longrightarrow z_1 z_2 = 24{,}9999\angle 83{,}1303$$

En forma polar

$$z_1 z_2 = (5\angle 30°)\,(5\angle 53{,}1301°) = 25\angle 83{,}1301°$$

b) $z_1 z_1^*$
En forma binómica

$$z_1 z_1^* = (4{,}3301 + j2{,}5)\,(4{,}3301 - j2{,}5) = (4{,}3301)^2 - (j2{,}5)^2 = 18{,}7498 + 6{,}25 = 24{,}9998$$

En su forma polar

$$z_1 z_1^* = (5\angle 30°)\,(5\angle -30°) = (5)^2\angle(30° - 30°) = 25$$

Queda establecido de forma general

$$ss^* = |s|^2$$

Resumen

Para cerrar en la tabla 1.1 se presentan las relaciones más importantes para la operación con números complejos

Cuadro 1.1: Relaciones más relevantes para el trabajo con números complejos

Suma - Resta	Coordenadas rectangulares	$s_1 + s_2 = (a + jb)\,(c + jd) = (a + c) + j\,(c + d)$
Multiplicación - División	Coordenadas polares	$s_1 s_2 = (\lvert s_1\rvert\angle\varphi)\,(\lvert s_2\rvert\angle\theta) = \lvert s_1\rvert\,\lvert s_s\rvert\angle(\varphi + \theta)$ $\frac{s_1}{s_2} = \frac{(\lvert s_1\rvert\angle\varphi)}{(\lvert s_2\rvert\angle\theta)} = \frac{\lvert s_1\rvert}{\lvert s_2\rvert}\angle(\varphi - \theta)$
Conjugado	Coordenadas rectangulares Coordenadas polares	$s_1 = a + jb \Rightarrow s_1^* = a - jb$ $s_1 = \lvert s_1\rvert\angle\varphi \Rightarrow s_1^* = \lvert s_1\rvert\angle -\varphi$
$ss^* = \lvert s\rvert^2$		
$(s_1 + s_2)^* = s_1^* + s_2^*$		
$(s_1 s_2)^* = s_1^* s_2^*$		
$s_1 + s_2 \neq \lvert s_1\rvert + \lvert s_2\rvert$		
$\frac{1}{s^*} = s$		